1.3 传感器的数学模型概述

从系统角度来看，一种传感器就是一种系统。根据系统工程学理论，一个系统总可以用一个数学方程式或函数来描述，即可用某种方程式或函数表征传感器的输入-输出间的关系和特性，从而用这种关系来指导对传感器的设计、制造、使用和校正。

在理想情况下，传感器的输出量应随输入量无失真地变化。但是实际的传感器（或测试系统）总是存在着诸如弹性、惯性和阻尼等元件，使得输出量 y 不仅与输入量 x 有关，而且还与输入量的变化速度、加速度等其他因素有关，所以要准确地建立传感器的数学模型是很困难的。在工程上总是通过忽略一些影响不大的因素，采用一些近似方法建立起系统的初步模型，然后经过反复模拟实验确立系统的最终数学模型。这种方法同样适用于传感器数学模型的建立。通常从传感器的静态输入-输出关系和动态输入-输出关系两方面建立数学模型。

1.3.1 静态模型

静态模型是指在输入静态信号（输入信号不随时间变化）的情况下，描述传感器输出与输入量间关系的一种函数。如果不考虑蠕动效应和迟滞特性，传感器的静态模型一般可用下面的多项式来表示：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1-1}$$

式中：x 为输入量；

y 为输出量；

a_0 为零位输出；

a_1 为传感器线性灵敏度，常用 K 或 S 表示；

a_2，…，a_n 为非线性项的待定系数。

1.3.2 动态模型

动态模型是指在准动态信号或动态信号（输入信号随时间而变化）作用下，描述传感器输出量和输入量间关系的一种函数，通常称为响应特性。动态模型通常采用微分方程和传递函数等来描述。

1. 微分方程

大多数传感器都属于模拟系统。为了准确建立传感器的动态数学模型，需忽略一些影响不大的因素，如非线性和随机变量等复杂因素，将传感器作为线性定常系统来考虑，因而其

动态数学模型可以用线性常系数微分方程来表示，即用线性常系数微分方程表示传感器输出量 y 和输入量 x 之间的关系。其通式如下：

$$
\begin{aligned}
& a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y \\
& = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x
\end{aligned} \tag{1-2}
$$

式中：$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 和 $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_0$ 为传感器的结构参数，是常量。对于传感器，除 $b_0 \neq 0$ 外，一般取 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为零。

所谓线性系统，就是在此方程式中不包含变量及其各阶微分的非一次幂项（包括交叉相乘项）。如果线性系统方程中各系数 a_n、b_m 在工作过程中不随时间和输入量的变化而变化，那么该系统就称为线性定常系统。用线性常系数微分方程来表示传感器的动态模型的优点是易于通过解微分方程分清暂态响应和稳态响应。

2. 传递函数

为了求解的方便，常采用拉普拉斯变换（简称拉氏变换）将（1-2）式变为算子 s 的代数式，或采用传递函数研究传感器的动态特性。如果在 $t \leqslant 0$ 时，$y(t) = 0$，则 $y(t)$ 的拉氏变换可定义为

$$
Y(s) = \int_0^\infty y(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t \tag{1-3}
$$

式中：$s = \sigma + \mathrm{j}\omega, \sigma > 0$。微分方程（1-2）两边取拉氏变换，则得

$$
Y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) = X(s)(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)
$$

定义输出 $y(t)$ 的拉氏变换 $Y(s)$ 和输入 $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 的比为该系统的传递函数 $H(s)$，则

$$
H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \tag{1-4}
$$

对 $y(t)$ 进行拉氏变换的初始条件是 $t \leqslant 0$ 时，$y(t) = 0$。对于传感器被激励之前所有的储能元件（如质量块、弹性元件、电气元件等）来说，均符合上述的初始条件。

显然，$H(s)$ 与输入量 $x(t)$ 无关，只与系统的结构参数有关。因而，$H(s)$ 可以简单而恰当地描述传感器输出与输入的关系。

对于多环节串、并联组成的传感器，若各环节阻抗匹配适当，则可忽略相互间的影响，传感器的等效传递函数可按代数方式求得。

若传感器由 r 个环节串联而成，其等效传递函数为

$$
H(s) = H_1(s) \times H_2(s) \times \cdots \times H_r(s) \tag{1-5}
$$

若传感器由 p 个环节并联而成，其等效传递函数为

$$
H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_p(s) \tag{1-6}
$$

这样就容易看清各个环节对系统的影响，因而便于对传感器或测量系统进行改进。