

1.4 传感器的基本特性

传感器（或测量设备）的输入-输出关系特性是传感器的基本特性。从误差角度分析输

入-输出特性是测量技术所要研究的主要内容之一。输入-输出特性虽是传感器的外部特性,但与其内部参数有密切关系。因为传感器不同的内部结构参数决定它们具有不同的外部特性,所以测量误差也是与内部结构参数密切相关的。

传感器所测量的物理量一般有两种形式,一种是稳态的(静态或准静态),即信号不随时间变化或变化很缓慢;另一种是动态的,即信号随时间的变化而变化。由于输入物理量状态不同,传感器所表现出来的输入-输出特性也不同,因此存在所谓的静态特性和动态特性。由于不同传感器有不同的内部参数,它们的静态特性和动态特性也表现出不同的特点,对测量结果的影响也各不相同。一个高精度传感器必须有良好的静态特性和动态特性,这样它才能完成信号(或能量)的无失真转换。

1.4.1 静态特性

衡量传感器静态特性的主要技术指标有线性度、测量范围和量程、迟滞和重复性、灵敏度、分辨力等。

1. 线性度

在采用直线拟合线性化时,输入-输出的校正曲线与其拟合直线之间的最大偏差称为非线性误差或线性度,通常用相对误差来表示,即

$$\gamma_L = \pm \frac{\Delta L_{\max}}{y_{FS}} \times 100\% \quad (1-7)$$

式中: $\Delta L_{\max}$ 为输出量和输入量实际曲线与拟合直线之间的最大偏差;

y_{FS} 为输出满量程值。

由此可见,非线性误差的大小是以一定的拟合直线为基准直线而得出来的。拟合直线不同,非线性误差也不同。所以,选择拟合直线的主要出发点应是获得最小的非线性误差。另外,还应考虑使用是否方便,计算是否简便。

传感器的静态模型(1-1)式有三种有用的特殊形式,它们所呈现的非线性程度可用图1-2表示。

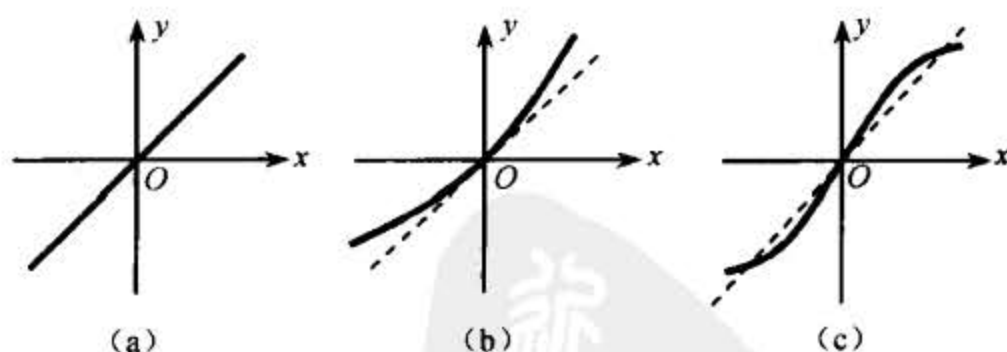


图 1-2 三种形式的特性曲线

(1) 理想的线性特性

理想的线性特性是如图1-2(a)所示的直线,在这种情况下,有 $a_0 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$, 因此得到

$$y = a_1 x \quad (1-8)$$

(2) 仅有偶次非线性项

图1-2(b)所示为仅有偶次非线性项的曲线。其输入-输出特性方程为

$$y = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots \quad (1-9)$$

因为它没有对称性，所以其线性范围较窄。一般传感器的设计很少采用这种特性。

(3) 仅有奇次非线性项

图 1-2 (c) 所示为仅有奇次非线性项的曲线。其输入-输出特性方程为

$$y = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots \quad (1-10)$$

具有这种特性的传感器，一般在输入量 x 相当大的范围内具有较宽的准线性。这是比较接近于理想直线的非线性特性，它相对坐标原点对称的，即 $y(+x) = -y(-x)$ ，所以它具有相当宽的近似线性范围。

2. 灵敏度

在稳态下传感器输出的变化量 Δy 与引起此变化量的输入变化量 Δx 的比值即为其静态灵敏度。其表达式为

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1-11)$$

式中： Δy 为输出的变化量；

Δx 为输入的变化量。

由此可见，传感器校准曲线的斜率就是其灵敏度。对线性传感器而言，其特性曲线的斜率处处相同，灵敏度 k 是一常数，其灵敏度就是它的静态特性曲线的斜率，即

$$k = \frac{y}{x} \quad (1-12)$$

非线性传感器的灵敏度是一个变量，只能表示传感器在某一工作点的灵敏度。

3. 重复性

重复性是指传感器在输入量按同一方向作全量程多次测试时，所得特性曲线不一致的程度。图 1-3 所示为实际输出的校正曲线的重复性。正行程的最大重复性偏差为 $\Delta R_{\max 1}$ ，反行程的最大重复性偏差为 $\Delta R_{\max 2}$ 。重复性误差用这两个最大偏差之中较大者 $\Delta R_{\max}$ 与满量程输出 y_{FS} 之比的百分数表示，即

$$\gamma_R = \pm \frac{\Delta R_{\max}}{y_{FS}} \times 100\% \quad (1-13)$$

重复性误差也常用绝对误差表示。

4. 迟滞（回差滞环）

对于同一大小的输入信号 x ，传感器在正（输入量增大）反（输入量减小）行程中，输入-输出曲线不重合称为迟滞。

迟滞特性如图 1-4 所示，它一般是通过实验的方法测得的。迟滞误差一般以正反行程中输出的最大偏差量与满量程输出之比的百分数表示，即

$$\gamma_H = \pm \frac{\Delta H_{\max}}{y_{FS}} \times 100\% \quad (1-14)$$

式中： $\Delta H_{\max}$ 为正反行程输出量之间的最大差值；

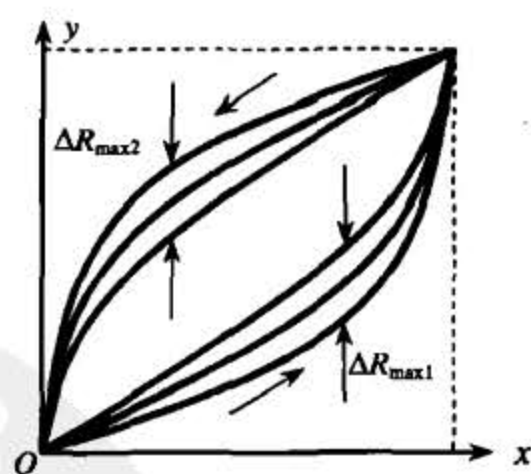


图 1-3 重复性

y_{FS} 为输出满量程值。

迟滞的影响因素包括传感器机械结构中的摩擦、间隙、松动、积尘和结构材料受力变形的滞后现象等。

5. 分辨力与阈值

分辨力是指传感器在规定测量范围内所能检测出的被测输入量的最小变化值。该值与满量程输入值之比的百分数称为分辨率。

阈值是使传感器的输出端产生可测变化量的最小被测输入量值,即零点附近的分辨力。

6. 稳定性

稳定性又称长期稳定性,即传感器在长时间内保持其原性能的能力。稳定性一般以室温条件下经过规定时间间隔后,传感器的输出与起始标定时的输出之间的差异来表示,有时也用标定的有效期来表示。

7. 漂移

漂移是指在一定时间间隔内,传感器的输出存在着与被测输入量无关的、不需要的变化。漂移常包括零点漂移和灵敏度漂移。

零点漂移或灵敏度漂移又可分为时间漂移和温度漂移,分别简称为时漂和温漂。时漂是指在规定的条件下,零点或灵敏度随时间有缓慢的变化;温漂是指由周围温度变化所引起的零点或灵敏度的变化。

8. 静态误差 (精度)

静态误差是指传感器在其全量程内任一点的输出值与其理论输出值的偏离程度。求静态误差是把全部校准数据与拟合直线上对应值的残差看成是随机分布,求出其标准偏差 σ , 取 2σ 或 3σ 值即为传感器的静态误差。

静态误差也可用相对误差表示,即

$$\gamma = \pm \frac{(2 \sim 3)\sigma}{y_{FS}} \times 100\% \quad (1-15)$$

静态误差是一项综合性指标,它基本上包含了前面叙述的非线性误差、迟滞误差、重复性误差等,所以也可以由这几个单项误差综合而得,即

$$\gamma = \sqrt{\gamma_L^2 + \gamma_H^2 + \gamma_R^2 + \dots} \quad (1-16)$$

1.4.2 动态特性

动态特性是指传感器对随时间变化的输入量的响应特性。

1. 动态误差

在测量静态信号时,线性传感器的输入-输出特性是一条直线,二者之间有一一对应的

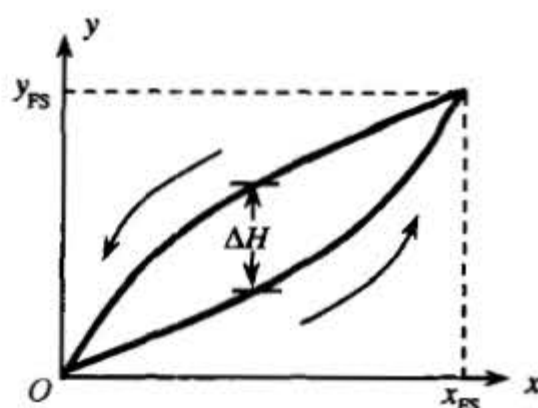


图 1-4 迟滞特性

关系,而且因为被测信号不随时间变化,测量和记录过程均不受时间的限制。而在实际测量工作中,大量的被测信号是动态信号,传感器对动态信号的测量不仅需要精确地测量信号幅值的大小,而且需要测量和记录动态信号变换过程的波形,这就要求传感器能迅速、准确地测出信号幅值的大小和无失真地再现被测信号随时间变化的波形。

动态特性好的传感器,其输出量随时间变化的曲线与被测量随时间变化的曲线一致或者相近,即具有相同的时间函数。但实际上,除了具有理想的比例特性的环节外,输出信号将不会与输入信号具有完全相同的时间函数,这种输出与输入间的差异就是所谓的动态误差。例如,用一只热电偶测量热水温度 T 。若环境温度为 T_0 (设 $T > T_0$) ,测试曲线与温度从 T_0 到 T 的阶跃存在一个差值,这个差值就是动态误差,如图 1-5 所示。

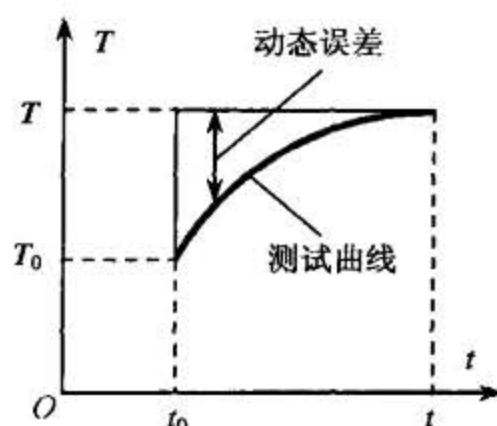


图 1-5 热电偶测温过程

在用热电偶测量热水温度时,水温的热量需通过热电偶的壳体传播到热接点上,热接点又具有一定热容量,它与水温的热平衡需要一个过程,所以热电偶不能在被测温度变化时立即产生相应的反应。这种由热容量所决定的性能称为热惯性,这种热惯性是热电偶固有的,热惯性决定了热电偶测量快速温度变化时会产生动态误差。

这种影响动态特性的“固有因素”任何传感器都有,只不过它们的表现形式和作用程度不同而已。研究传感器的动态特性主要是从测量误差角度分析产生动态误差的原因以及改善措施。

2. 研究传感器动态特性的方法及其指标

研究动态特性可以从时域和频域两个方面采用瞬态响应法和频率响应法来分析。由于输入信号的时间函数形式是多种多样的,在时域内研究传感器的响应特性时,只能研究几种特定的输入时间函数(如阶跃函数、脉冲函数和斜坡函数等)的响应特性。在频域内研究动态特性一般是采用正弦函数得到频率响应特性。为了便于比较、评价或动态定标,最常用的输入信号为阶跃信号和正弦信号。因此,对应的方法为阶跃响应法和频率响应法。

(1) 阶跃响应

当给静止的传感器输入一个单位阶跃函数信号

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1-17)$$

时,其输出特性称为阶跃响应特性。为表征传感器的动态特性,常用以下几项指标来衡量阶跃响应特性,如图 1-6 所示。

① 最大超调量 σ_p : 响应曲线偏离阶跃曲线的最大值。

若稳态值为 1,则最大百分比超调量为

$$\sigma_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \quad (1-18)$$

最大超调量能说明传感器的相对稳定性。

② 延滞时间 t_d : 阶跃响应达到稳态值 50% 所需要的时间。

③ 上升时间 t_r : 上升时间有几种定义。

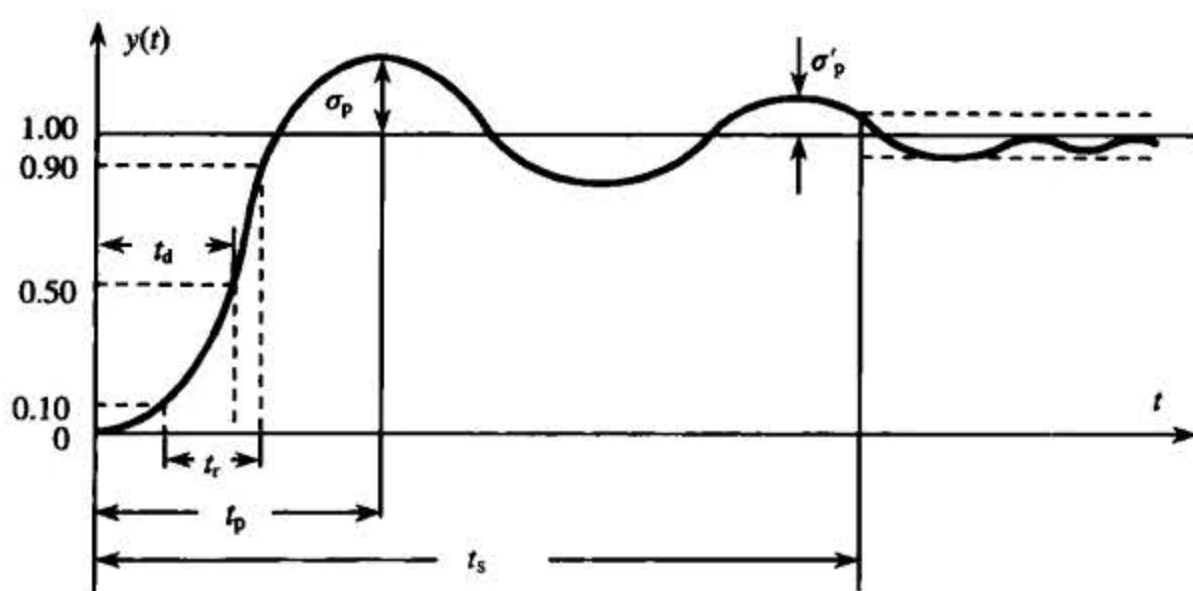


图 1-6 阶跃响应特性

a. 响应曲线从稳态值的 10% 上升到 90% 所需要的时间。

b. 响应曲线从稳态值的 5% 上升到 95% 所需要的时间。

c. 响应曲线从零到第一次到达稳态值所需要的时间。

对有振荡的传感器常用 c 定义, 对无振荡的传感器常用 a 定义。

④ 峰值时间 t_p : 响应曲线到第一个峰值所需要的时间。

⑤ 响应时间 t_s : 响应曲线衰减到与稳态值之差不超过 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$ 时所需要的时间。

有时称为过渡过程时间。

这些是时域响应的主要指标。对于一个传感器, 并不需要把每一个指标都提出来, 往往根据具体的要求只提出几个需要的性能指标就可以了。

(2) 频率响应

在采用正弦输入研究传感器频域动态特性时, 常用幅频特性和相频特性来描述传感器的动态特性, 其重要指标是频带宽度, 简称带宽。带宽是指增益变化不超过某一规定分贝值的频率范围。

在定常线性系统中, 拉氏变换是广义的傅里叶变换 (简称傅氏变换), 取 $s = \sigma + j\omega$ 中的 $\sigma = 0$, 则 $s = j\omega$, 即拉氏变换局限于 s 平面的虚轴, 可得到傅氏变换。

因此 (1-3) 式

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

变为

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

同样有

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

则

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)s^m + b_{m-1}(j\omega)s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n(j\omega)s^n + a_{n-1}(j\omega)s^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (1-19)$$

$H(j\omega)$ 称为传感器的频率响应函数, 简称频率响应或频率特性。很明显, 频率响应是传递函数的一个特例。不难看出, 传感器的频率响应 $H(j\omega)$ 就是在初始条件为零时, 输出的傅氏变换与输入的傅氏变换之比, 是在“频域”对系统传递信息特性的描述。

通常, 频率响应函数 $H(j\omega)$ 是一个复函数, 它可以用指数形式表示, 即

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y}{X} e^{j\omega} = A(\omega) e^{j\omega} \quad (1-20)$$

其中

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{Y}{X}$$

$$\text{即} \quad A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{[H_R(\omega)]^2 + [H_I(\omega)]^2} \quad (1-21)$$

$A(\omega)$ 称为传感器的幅频特性, 也称为传感器的动态灵敏度 (或增益)。 $A(\omega)$ 表示传感器的输出与输入的幅值比随输入信号频率而变化的关系。

若以 $H_R(\omega) = \text{Re}\left[\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right]$, $H_I(\omega) = \text{Im}\left[\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right]$ 分别表示 $H(j\omega)$ 的实部和虚部, 则频率特性的相位角为

$$\varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}\right] = \arctan\left\{\frac{\text{Im}\left[\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right]}{\text{Re}\left[\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right]}\right\} \quad (1-22)$$

$\varphi(\omega)$ 表示传感器的输出信号相位随频率而变化的关系。对于传感器, φ 通常是负的, 表示传感器的输出滞后于输入的相位角度, 而且 φ 随 ω 而变, 故称之为传感器的相频特性。

3. 典型环节传感器系统的动态响应分析

多数传感器输出与输入的关系均可用零阶、一阶或二阶微分方程来描述, 据此可把传感器分为零阶传感器、一阶传感器和二阶传感器。下面将分别讨论这几种传感器的数学模型。

(1) 零阶传感器系统

由 (1-2) 式可知, 由于零阶传感器的系数只有 a_0 、 b_0 , 故零阶系统的微分方程为

$$a_0 Y(t) = b_0 X(t) \quad (1-23)$$

$$\text{或} \quad Y(t) = \frac{b_0}{a_0} X(t) = KX(t) \quad (1-24)$$

式中: K 为静态灵敏度。

零阶传感器的传递函数和频率特性为

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_0}{a_0} = K \quad (1-25)$$

由 (1-25) 式可知, 零阶传感器的输出和输入成正比, 并且与信号频率无关, 因此无幅值和相位失真问题。零阶传感器具有理想的动态特性。

(2) 一阶传感器系统

由 (1-2) 式可知, 一阶传感器系统的微分方程为

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x \quad (1-26)$$

$$\text{或} \quad \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{b_0}{a_0} x$$

$$\text{即} \quad \tau \frac{dy}{dt} + y = Kx \quad (1-27)$$

式中: $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ 为一阶传感器系统的时间常数;

$K = \frac{b_0}{a_0}$ 为一阶传感器系统的静态灵敏度。

对 (1-27) 式进行拉氏变换, 得

$$(\tau s + 1)Y(s) = KX(s) \quad (1-28)$$

则传递函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (1-29)$$

频率响应函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{K}{j\omega\tau + 1} \quad (1-30)$$

幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \quad (1-31)$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega\tau) \quad (1-32)$$

当 $\omega\tau \ll 1$ 时, $A(\omega) = K$, 说明传感器的输出与输入为线性关系, 即时间常数 τ 越小, 频率特性越好; 当 $\varphi(\omega)$ 很小时, $\tan\varphi = \tan\arctan|H(j\omega)| \approx \varphi$, $\varphi(\omega) \approx -\omega\tau$, 所以相位差与频率 ω 为线性关系, 这时测试是无失真的, $y(t)$ 能真实反映输入 $x(t)$ 的变化规律。

若输入为阶跃函数

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A & t > 0 \end{cases} \quad (1-33)$$

则 (1-27) 式的解为

$$y = KA(1 - e^{-t/\tau}) \quad (1-34)$$

可见, 稳态响应输出 $y = KA$ 是输入的 K 倍, 暂态响应是一个指数函数, 当 $t = \tau$ 时

$$y(\tau) = KA(1 - e^{-1}) = 0.632KA \quad (1-35)$$

暂态响应值达到稳态值的 63.2%, 即定义的时间常数 τ 。 τ 越小, 响应曲线越接近于阶跃曲线。

例 1-1 图 1-7 所示为一只由弹簧阻尼器组成的机械压力传感器, 系统输入量为 $F(t) = Kx(t)$, 系统输出量为位移 $y(t)$ 。试分析该系统的频率响应特性。

分析: 根据牛顿第二定律, 系统原始方程为

$$f_c + f_K = F(t)$$

式中: f_c 为阻尼器摩擦力, $f_c = C \frac{dy(t)}{dt}$;

f_K 为弹簧力, $f_K = Ky(t)$ 。

该系统可写为

$$C \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = Kx(t)$$

两边除以 K 得 $\frac{C}{K} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

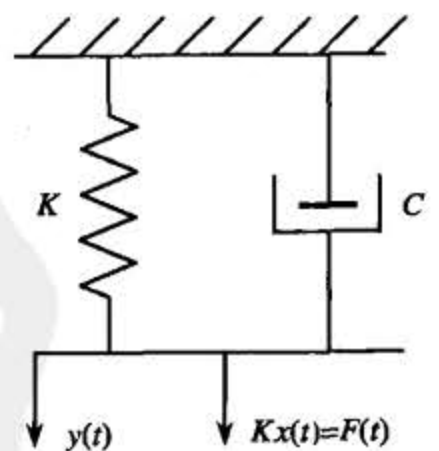


图 1-7 弹簧阻尼器组成的机械压力传感器

两边取拉氏变换, 将上式写成算符 s 的代数式, 得

$$H(s) = \frac{1}{\frac{C}{K}s + 1} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (1-36)$$

式中: τ 为时间常数。

故该系统的频率响应函数 $H(j\omega)$ 、幅频特性 $A(\omega)$ 、相频特性 $\varphi(\omega)$ 分别为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{j\omega\tau + 1} \\ A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \\ \varphi(\omega) &= -\arctan(\omega\tau) \end{aligned}$$

例 1-2 在如图 1-8 所示的一阶测温传感器系统中, 已知传感器敏感部分的质量为 m , 比热容为 C , 表面积为 S , 传热系数为 h [单位为 $W/(m^2 \cdot K)$]。试分析该温度传感器模型, 给出输入量 T_0 与输出量 T 之间的微分方程, 并推导其幅频特性、相频特性及阶跃响应特性。

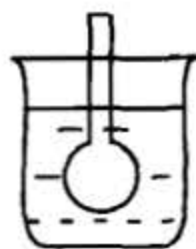


图 1-8 一阶测温传感器

解: 根据能量守恒定律可列出如下方程组

$$\begin{cases} dT = \frac{dQ}{mC} \\ dQ = hS(T_0 - T)dt \end{cases}$$

两式联立得

$$\frac{mC}{hS} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_0$$

由 (1-27) 式可知在该系统中

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} = \frac{mC}{hS}, K = \frac{b_0}{a_0} = 1$$

代入 (1-30) 式即可得到该系统的频率响应特性

$$H(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{T_0(j\omega)} = \frac{K}{j\omega\tau + 1} = \frac{1}{\frac{j\omega mC}{hS} + 1}$$

其幅频特性

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega mC}{hS}\right)^2 + 1}}$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega\tau) = \arctan\left(-\frac{\omega mC}{hS}\right)$$

阶跃响应特性

$$T = KA(1 - e^{-t/\tau})$$

将 $\tau = \frac{mC}{hS}, K = 1$ 代入得

$$T = A(1 - e^{-\frac{hS}{mC}t})$$

(3) 二阶传感器的数学模型

很多传感器, 如振动传感器、压力传感器等属于二阶传感器。由 (1-2) 式得出, 二阶传感器系统的微分方程为

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x \quad (1-37)$$

或

$$\frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{b_0}{a_0} x$$

两边取拉氏变换, 将上式写成算符 s 的代数式, 得

$$\left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} s + 1 \right) Y(s) = KX(s) \quad (1-38)$$

式中: $K = \frac{b_0}{a_0}$ 为静态灵敏度;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ 为无阻尼系统固有频率;

$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ 为阻尼比。

上述三个量 K 、 ω_0 、 ξ 为二阶传感器动态特性的特征量。

由 (1-38) 式可得二阶传感器系统的传递函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (1-39)$$

频率响应特性

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\xi j\omega\omega_0 + \omega_0^2} \quad (1-40)$$

幅频特性

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (1-41)$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{2\xi\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (1-42)$$

从 (1-41) 式和 (1-42) 式可以得出如下结论。

① 当 $\omega/\omega_0 \leq 1$ (即 $\omega \leq \omega_0$) 时, $A(\omega) \approx K$, $\varphi(\omega) \approx 0$, 即近似于理想的系统 (零阶系统)。要想使工作频带加宽, 最关键的是提高无阻尼固有频率 ω_0 。

② 当 $\omega/\omega_0 \rightarrow 1$ (即 $\omega \rightarrow \omega_0$) 时, 幅频特性和相频特性都与阻尼比 ξ 有明显的关系:

当 $\xi < 1$ (欠阻尼) 时, $A(\omega)$ 在 $\omega/\omega_0 \approx 1$ 时出现极大值, 即共振现象; 当 $\xi = 0$ 时, 共振频率就等于无阻尼固有频率 ω_0 ; 当 $\xi > 0$ 时, 有阻尼的共振频率为 $\omega_d = \sqrt{1 - 2\xi^2} \omega_0$ 。

当 $\xi = 0.7$ (最佳阻尼) 时, $A(\omega)$ 的曲线平坦段最宽, $\varphi(\omega)$ 的曲线接近于一条直线。由于其幅值失真与相位失真均较小, 故 $\xi = 0.7$ 时称为最佳阻尼。

当 $\xi = 1$ (临界阻尼) 时, $A(\omega)$ 特性曲线永远小于 1, 且 $\omega_d = 0$, 不会出现共振现象。

③ 当 $\omega/\omega_0 \geq 1$ (即 $\omega \geq \omega_0$) 时, $A(\omega)$ 特性曲线趋于零, 几乎没有响应了。

综上所述, 用二阶系统描述的传感器动态特性的好坏主要取决于固有频率 ω_0 或共振频率 ω_d 。另外适当地选取 ξ 的值也可以改善动态响应特性。

例 1-3 用一个带保护套管的热电偶测量恒温水槽中热水的温度 T_1 , 如图 1-9 所示。套管根部温度为 T_0 , 保护套管的温度为 T_2 。

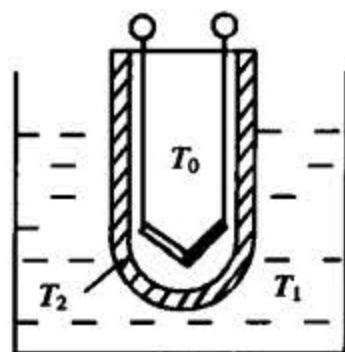


图 1-9 二阶测温传感器

已知热电偶热容量为 $m_1 C_1$ ，套管热容量为 $m_2 C_2$ ，套管与热电偶间的热阻为 R_1 ，被测介质与套管间的热阻为 R_2 。写出该测试系统的微分方程，并推导其幅频特性、相频特性。

解：根据热力学能量守恒定律列出方程

$$\begin{cases} m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = q_{02} - q_{01} \\ q_{02} = \frac{T_0 - T_2}{R_2} \\ q_{01} = \frac{T_2 - T_1}{R_1} \end{cases} \quad (1-43)$$

式中： q_{02} 为介质传给套管的热量；

q_{01} 为套管传给热电偶的热量。

因为 $R_1 \gg R_2$ ，所以 q_{01} 可以忽略。整理 (1-43) 式得

$$R_2 m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_0$$

令 $\tau_2 = R_2 m_2 C_2$ ，则得

$$\tau_2 \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_0 \quad (1-44)$$

同理，令 $\tau_1 = R_1 m_1 C_1$ ，则得

$$\tau_1 \frac{dT_1}{dt} + T_1 = T_2 \quad (1-45)$$

将 (1-44) 式和 (1-45) 式联立，消去中间参量 T_2 ，便得到此测量系统的微分方程

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 T_1}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dT_1}{dt} + T_1 = T_0 \quad (1-46)$$

令
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

将 ω_0 和 ξ 代入 (1-46) 式可得

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 T_1}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{dT_1}{dt} + T_1 = T_0 \quad (1-47)$$

由 (1-47) 式可知，带保护套管的热电偶是一个二阶传感器系统。

将 (1-47) 式两边取拉氏变换，写成算符 s 的代数式，得

$$\left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi s}{\omega_0} + 1 \right) T_1(s) = T_0(s)$$

传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi s}{\omega_0} + 1}$$

频率响应特性

$$H(j\omega) = \frac{T_1(j\omega)}{T_0(j\omega)} = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_0} + 1}$$

幅频特性

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$